

プラズマ乱流シミュレーションと非線形三波相互作用のネットワーク可視化

前山伸也

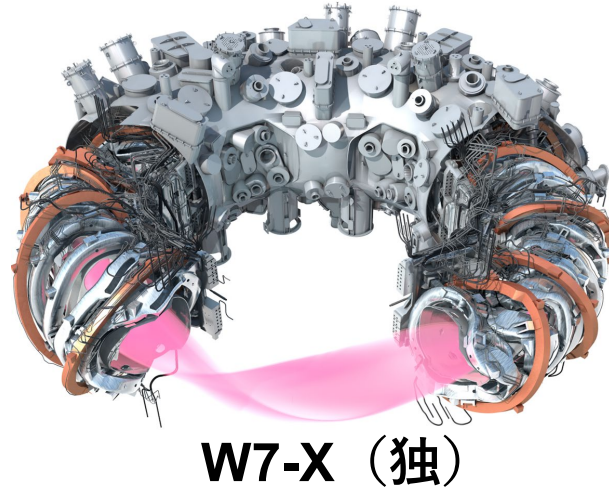
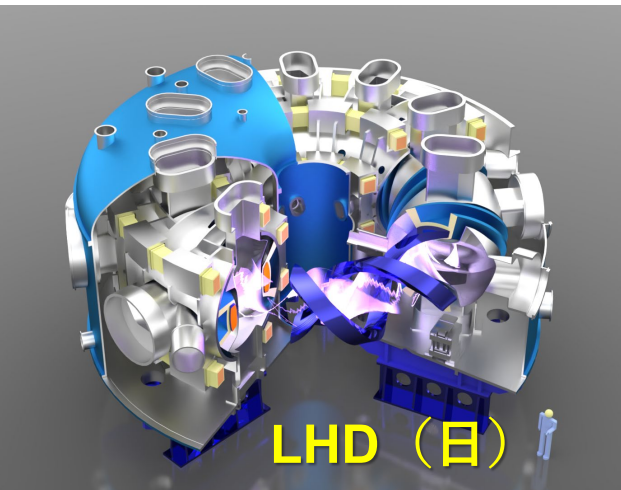
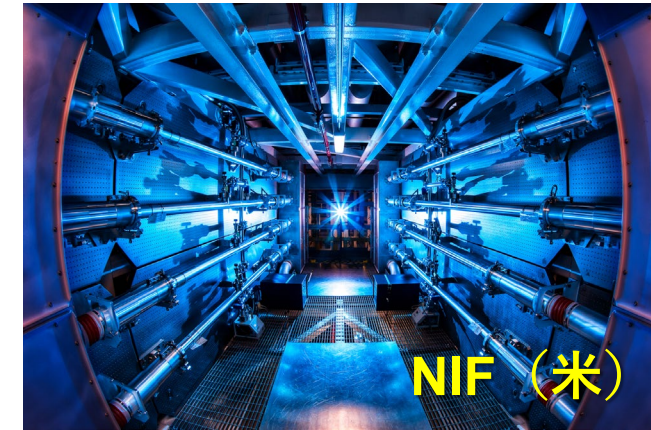
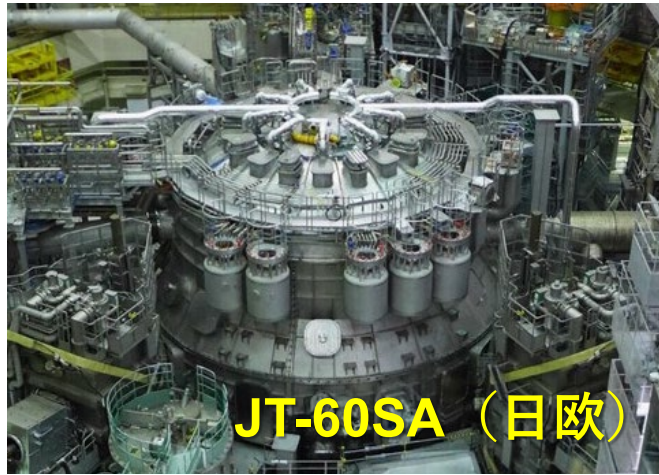
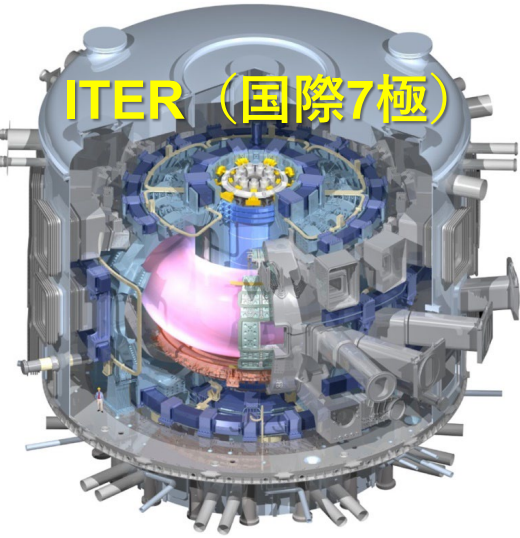
自然科学研究機構 核融合科学研究所
メタ階層ダイナミクスユニット

2024年度夏の体験入学, 2024年8月26日 - 30日

Outline

- 磁場閉じ込めプラズマにおける乱流と輸送
- 実習課題について（理論）
- 実習課題について（シミュレーション）
- 実習の進め方

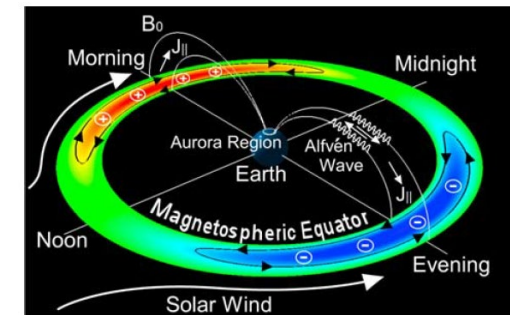
核融合とプラズマ物理



地球磁気圏



ブラックホール
降着円盤

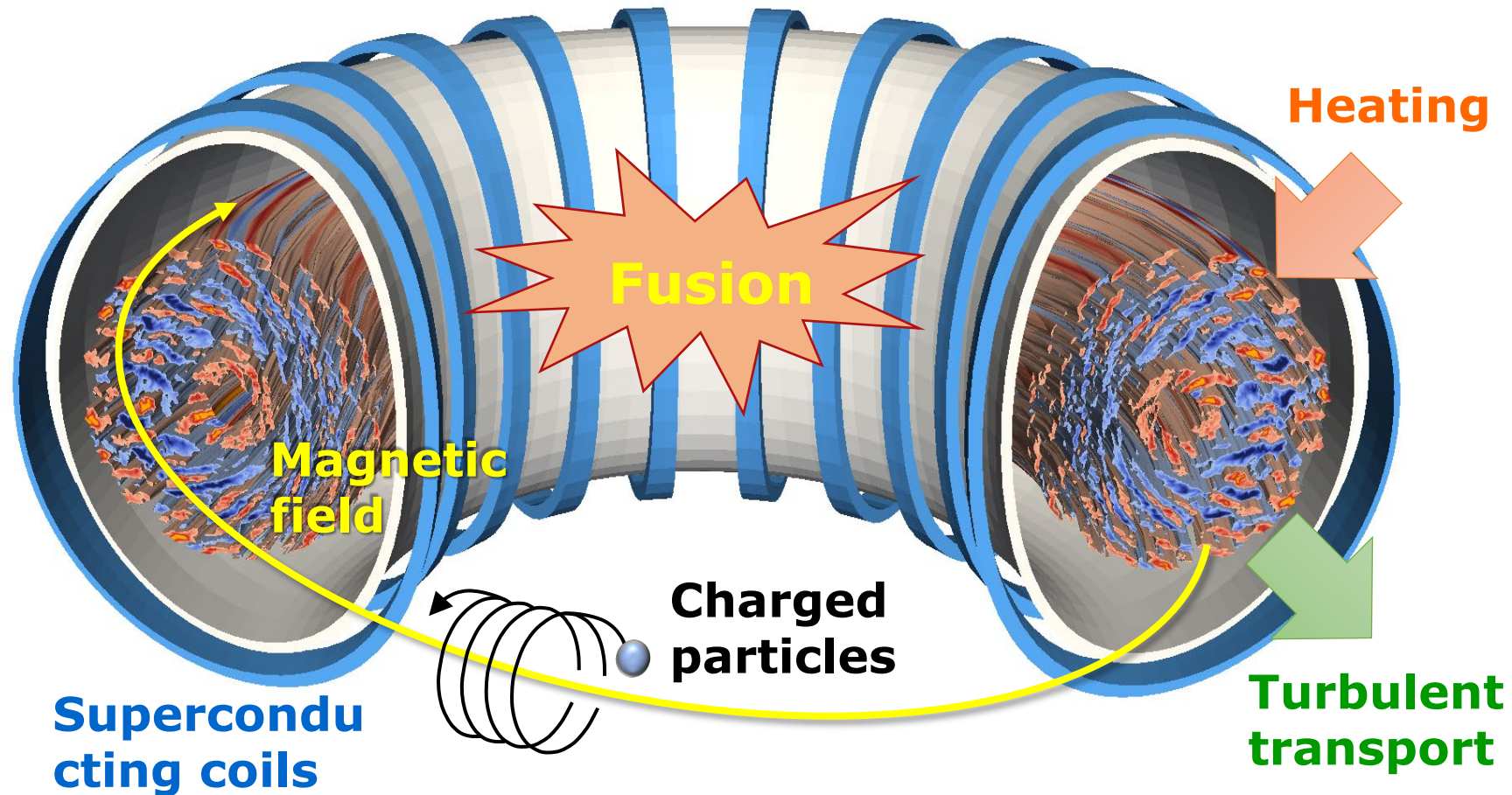


惑星大気

- ✓ 国際協力・競争の下で核融合炉の開発が進められている
- ✓ 学問としてのプラズマ物理の学際的な広がり

磁場閉じ込めプラズマの輸送

- 磁場閉じ込め核融合装置・・・高温のプラズマを円環上の強力な磁場で閉じ込める
- プラズマ中で生じる乱流が熱や粒子の輸送を引き起こし、閉じ込めを劣化させてしまう



乱流輸送研究小史

実験研究

1950年代 異常輸送現象の発見

1960年代 トーラス型装置の成功

1970年代 加熱増大とともに
閉じ込め時間低下

核融合炉は実現不可能？

1980年代 高閉じ込め放電発見

JET（欧）で $Q = \text{核融合出力} / \text{加熱入力} = 0.67$ 達成。
核融合炉実証の見通し。

2000年代 高閉じ込め放電で
帯状流の観測

現在 周辺輸送障壁や非局所性などの理論拡張・核燃焼プラズマへの外挿

理論・シミュレーション研究

1960年代 微視的乱流による
異常輸送の描像

1970年代 乱流の自己組織化に
よる帯状流形成の予測

惑星大気や中性気体乱流等
にも共通する普遍的物理。

1990年代 ジャイロ運動論シミュ
レーションによる帯状流
形成と乱流輸送抑制

ジャイロ運動論に基づく乱流
研究は宇宙プラズマにも波及。

2010年代 乱流輸送の実験・理論の直接比較

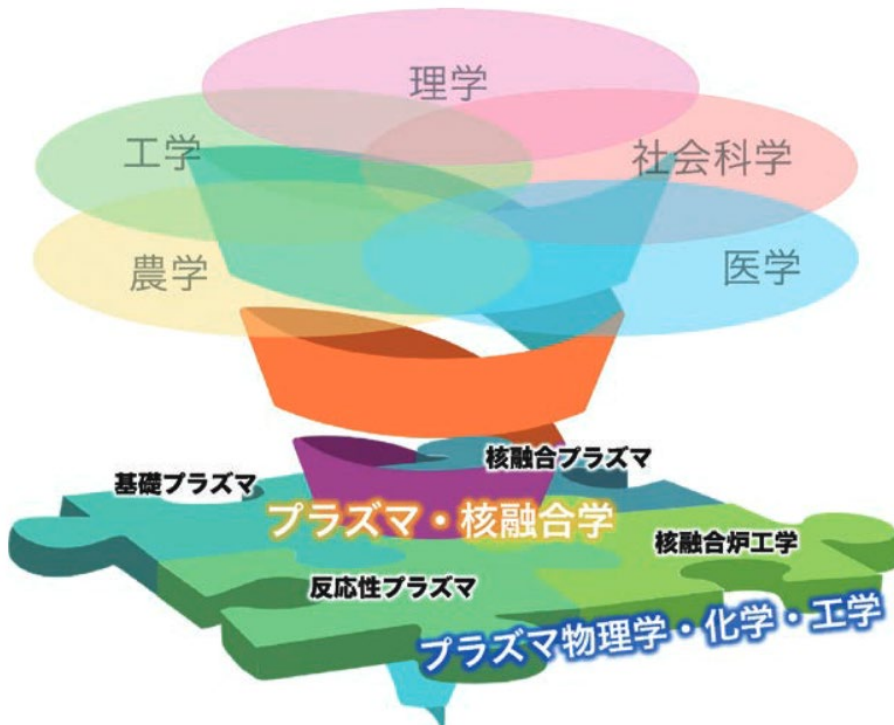
Further references

- 総説 プラズマ・核融合サイエンスチャート

https://www.jspf.or.jp/Journal/PDF_JSPF/jspf2024_01/10001PRall.pdf

- 学術課題集 核融合プラズマのサイエンスとその拡がり

https://www.nifs.ac.jp/research/Fusion2030/FPWG/fpwg_SciChallenges.html



課題番号23 横山雅之(核融合科学研究所)

核融合研究から芽吹く新たなインフラマテイクス

課題番号27 田中宏彦(名古屋大学)

プラズマと物質が触れ合うことにより起こる現象を理

課題番号16 辻井直人(東京大学)

波でプラズマを自在に操れるか？

課題番号1 藤堂泰(核融合科学研究所)

核燃焼プラズマの自己組織化を予測・活用する

核燃焼プラズマにおける高エネルギーアルファ粒子の閉じ込めと活用

カテゴリー: A1, B2, B4, B5, B6, B13

目指すもの(output):

- ITER や原型炉での高エネルギー粒子駆動不安定性とアルファ粒子輸送の予測・制御

波及(outcome):

- 高エネルギー粒子駆動不安定性による帯状流の形成と微視的乱流輸送の制御
- アルファチャネリング
- 運動論的電磁流体力学の確立

Alfvén Eigenmodes in ITER

ITER プラズマにおけるアルフベン固有モード

ロアプラズマ

熱・粒子負荷

プラズマ

放射

ダイバーゲン

壁

イオン

電子

中性原子

材料原子

図

研究の例【図】

上図は、核融合

Outline

- 磁場閉じ込めプラズマにおける乱流と輸送
- 実習課題について（理論）
- 実習課題について（シミュレーション）
- 実習の進め方

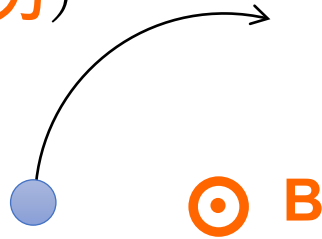
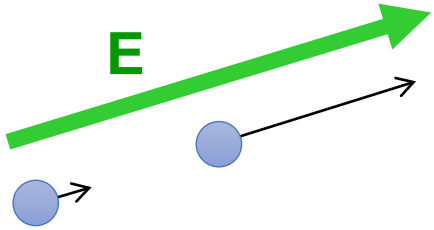
プラズマ現象の記述

プラズマ・・・**荷電粒子**により構成され、**集団的振る舞い**をする準中性気体。

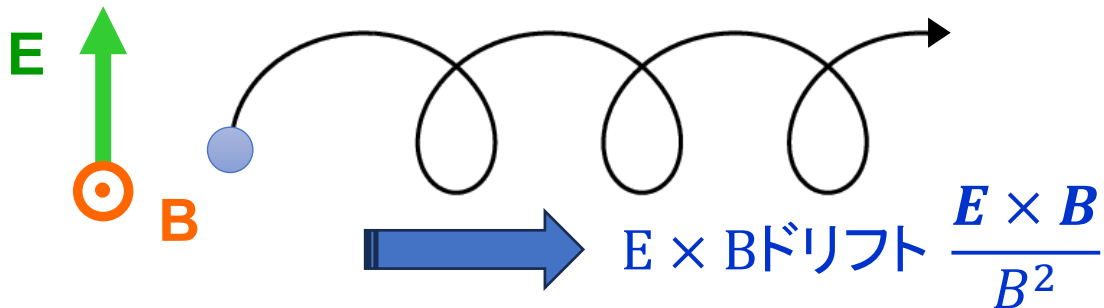
荷電粒子の運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- ・ 電場により加速され、**(Coulomb力)**
- ・ 磁場により曲げられる。**(Lorentz力)**



- ・ 磁場に垂直な力が加わるとドリフト運動する。



運動論方程式

- ・ 様々な位置・速度を持つ粒子集団の存在確率（粒子分布関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ）の時間発展を記述する

or 流体方程式

- ・ 粒子分布関数からさらに簡単化し、密度 $n(\mathbf{x}, t)$ 、流速 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 、圧力 $p(\mathbf{x}, t)$ などの低次流体量のみで現象を記述する

+

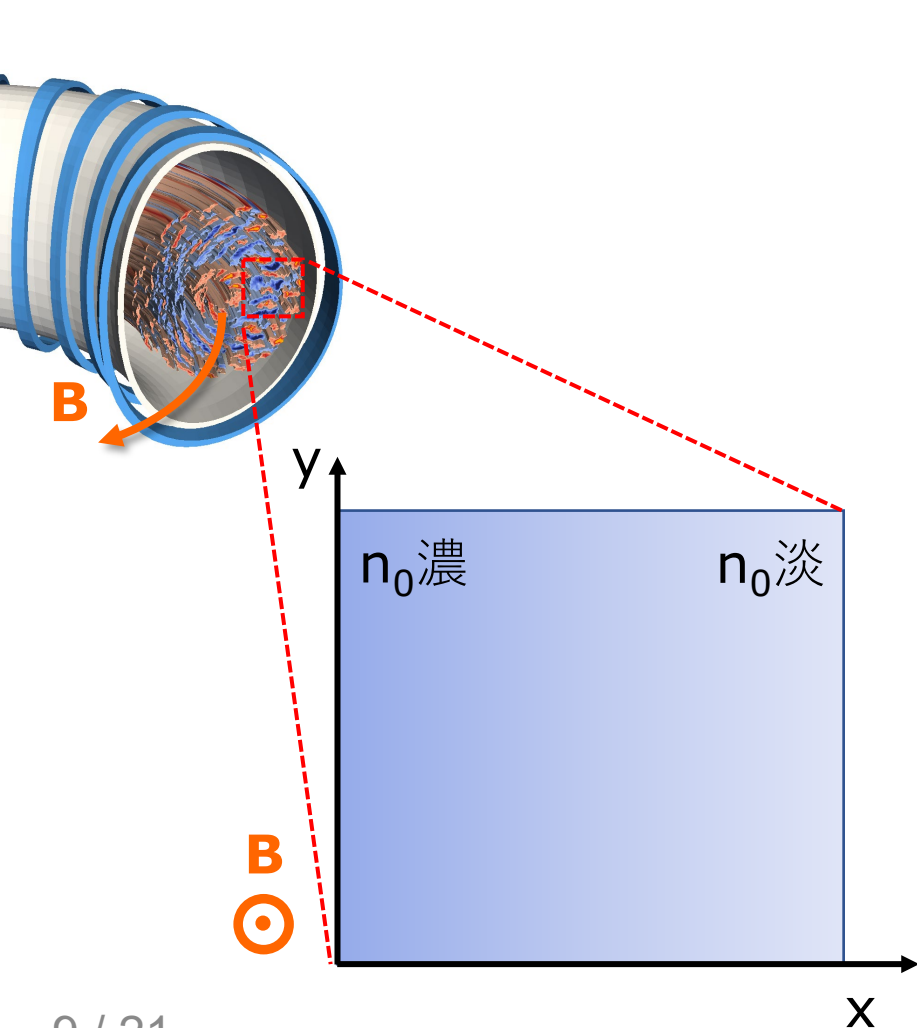
Maxwell方程式

- ・ 荷電粒子集団と電磁場の関係を記述

長谷川-若谷方程式

磁場閉じ込めプラズマの乱流現象を記述する簡約モデルの一つ。

- 一様磁場 $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ 、一定背景密度 $n_0 = n_0(x)$ の下で、プラズマの揺動を以下でモデル化する



ExBドリフト
による移流

背景密度
勾配

電気抵抗による断
熱分布からのずれ

粘性

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + \{\tilde{\phi}, \tilde{n}\} + \kappa \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} = C(\tilde{\phi} - \tilde{n}) - \nu \nabla^4 \tilde{n}$$

$$\text{渦度方程式} \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \{\tilde{\phi}, \tilde{\omega}\} = C(\tilde{\phi} - \tilde{n}) - \nu \nabla^4 \tilde{\omega}$$

密度揺動 $\tilde{n}(x, y, t)$, 静電ポテンシャル揺動 $\tilde{\phi}(x, y, t)$,
渦度 $\tilde{\omega}(x, y, t) \equiv \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \tilde{\mathbf{u}} = \nabla^2 \tilde{\phi}$, E × B 流速 $\tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{\phi} \times \hat{\mathbf{z}}$,

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$, 粘性定数 ν ,

密度勾配パラメータ $\kappa = -\partial_x \ln n_0$,

断熱パラメータ $C(f) = \begin{cases} \text{定数 } c_a f & \text{flag_adiabaticity="constant"} \\ -c_a \partial_y^2 f & \text{flag_adiabaticity="kysquare"} \\ c_a (f - \langle f \rangle_y) & \text{flag_adiabaticity="modified"} \end{cases}$

なぜ揺動が成長する？ – 抵抗性ドリフト波不安定性

- 電気抵抗の無い極限 $C \gg 1$ では、密度揺動はポテンシャル揺動と同位相の断熱応答をする。

$$\tilde{n} = \tilde{\phi}$$

密度勾配の下で生じた揺らぎが波として伝搬・・・ドリフト波

- 有限の電気抵抗があると、密度揺動とポテンシャル揺動の位相がずれる。

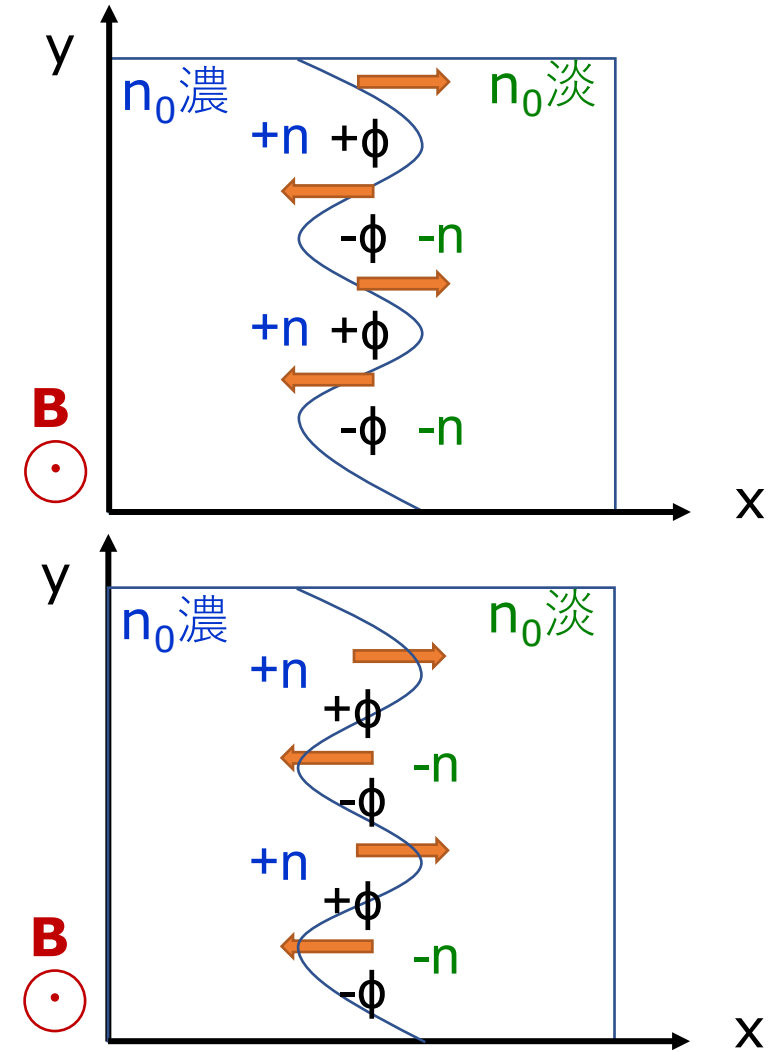
$$\tilde{n} = n_k \cos(ky), \tilde{\phi} = \phi_k \cos(ky + \delta)$$

ポテンシャル揺動による $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト

$$\tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{\phi} \times \hat{\mathbf{z}} = -k \phi_k \sin(ky + \delta) \hat{\mathbf{x}}$$

は密度揺動を助長するように働き、揺動を成長。（抵抗性ドリフト波不安定性）

密度勾配が不安定性の駆動源。



乱流速度場のエネルギースペクトル

Fourier変換することで、不安定成長する波や乱流渦、帯状流などを分解して詳しく調べる。

$$\tilde{\phi}(x, y, t) = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} (k_x x + k_y y)}, \quad \left(\mathbf{k} = (k_x, k_y), \quad \sum_{\mathbf{k}} = \sum_{k_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{+\infty} \right)$$

乱流速度場のエネルギースペクトル

$$E_{\mathbf{k}} = |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2 = k^2 |\phi_{\mathbf{k}}|^2$$

について、渦度方程式より、以下のエネルギーバランス方程式を得る。

$$\frac{dE_{\mathbf{k}}}{dt} = \overset{\substack{\text{ExBドリフト} \\ \text{による移流}}}{\downarrow} T_{\mathbf{k}} - \overset{\substack{\text{電気抵抗を介した密} \\ \text{度揺動とのやり取り}}}{\downarrow} \text{Re}[C_{\mathbf{k}}(\phi_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}})\phi_{\mathbf{k}}^*] - \overset{\substack{\text{粘性による} \\ \text{渦の減衰}}}{\downarrow} \nu k^4 E_{\mathbf{k}}$$

非線形相互作用・・・あるモード \mathbf{k} の時間発展は、非線形項を介して他のモード \mathbf{p}, \mathbf{q} の影響を受ける。（Cf. 非線形項がない場合はそれぞれのモードは独立だった。）

$$T_{\mathbf{k}} = \text{Re} \left[\phi_{\mathbf{k}}^* \{ \tilde{\phi}, \tilde{\omega} \}_{\mathbf{k}} \right] = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$$

非線形相互作用の解析 1

対称化非線形エネルギー伝達関数

$$S_k^{p,q} = \text{Re} \left[\frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{p} \times \mathbf{q} (q^2 - p^2)}{2} \phi_k \phi_p \phi_q \right] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{0}}$$

．．．「他のモード \mathbf{p} , \mathbf{q} との相互作用により、モード \mathbf{k} がエネルギーを受け取った ($S_k^{p,q} > 0$) または受け渡した ($S_k^{p,q} < 0$) 正味の伝達量」を表す。

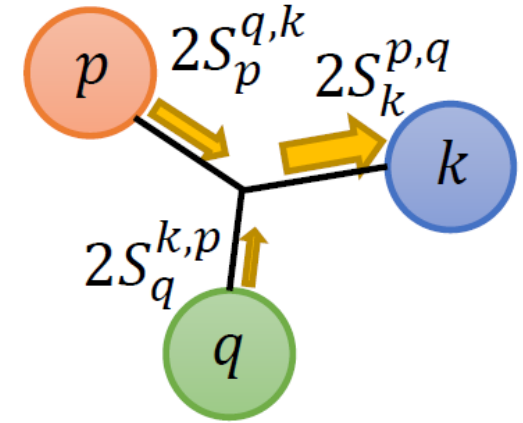
- ✓ 三波結合条件 $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ を満たすモード間で相互作用が起こる
- ✓ 対称性 $S_k^{p,q} = S_k^{q,p}$
- ✓ 詳細つり合い（保存則） $S_k^{p,q} + S_p^{q,k} + S_q^{k,p} = 0$

単なる波（抵抗性ドリフト波）ではなく、微細な乱流渦や帯状流などの複雑な流れ場が生じるのに本質的な機構。

→ シミュレーションデータを解析して、実際に見てみよう。

非線形相互作用の解析 1

それぞれのモードを頂点とし、三波結合条件を満たすモード間での保存的なエネルギーのやり取りをグラフとして可視化してみる。



...実際にやってみると、解析の難しさを実感。

解析の難しさ①・・・超グラフの複雑性。1対の頂点をつなぐ辺を持つ通常のグラフとは異なり、複数の頂点が同時に関与する超グラフなので、「エネルギーが**A**から**B**に伝わった」のような議論ができない。

解析の難しさ②・・・非常に自由度が高い。グラフはかけても、人間が理解できない。

何かもう少し上手い解析方法、描画方法はないものか...

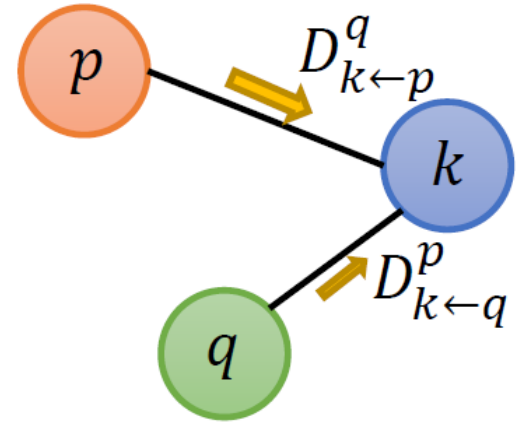
非線形相互作用の解析 2

エネルギー伝達の有向表現 [Maeyama, New J. Phys. (2021)]

$$D_{k \leftarrow q}^p$$

対称化伝達関数に基づき、1つのモードはgainまたはlossのいずれかのみというルールの下で、1対1伝達関数を構築。

・・・「モード p を仲介とし、モード q からモード k へのエネルギー伝達 ($D_{k \leftarrow q}^p > 0$) 量」を表す。



- ✓ 保存則 $D_{k \leftarrow q}^p = -D_{q \leftarrow k}^p$
- ✓ 伝達の無矛盾性 $S_k^{p,q} = \frac{1}{2} (D_{k \leftarrow q}^p + D_{k \leftarrow p}^q)$, $T_k = \sum_p \sum_q S_k^{p,q} = \sum_p \sum_q D_{k \leftarrow q}^p$
- ✓ 循環の任意性を除外しつつ、伝達経路が解析可能。

→シミュレーションデータを解析して、実際に見てみよう。

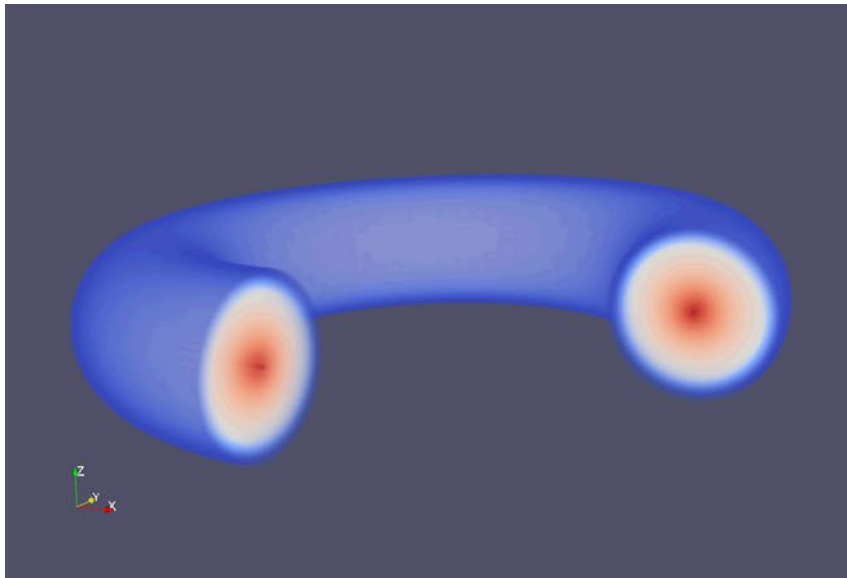
Outline

- 磁場閉じ込めプラズマにおける乱流と輸送
- 実習課題について（理論）
- 実習課題について（シミュレーション）
- 実習の進め方

方程式をコンピュータで解く

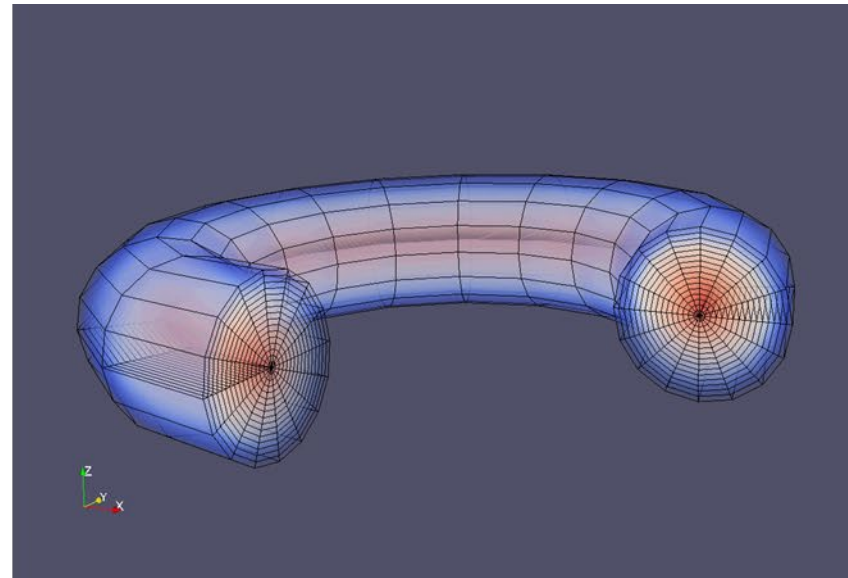
現実の空間(連続的)

$$f(\boldsymbol{x})$$



コンピュータ(離散的)※1

$$f(\boldsymbol{x}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$



※1 hweq2d/ ではFourier級数展開により方程式を離散化している。

時間についても離散化。 ※2

$$f(\boldsymbol{x}_i, t_{j+1}) \simeq f(\boldsymbol{x}_i, t_j) + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t}$$

※2 hweq2d/ では4次精度 Runge-Kutta-Gill法により時間積分している。

シミュレーションコード

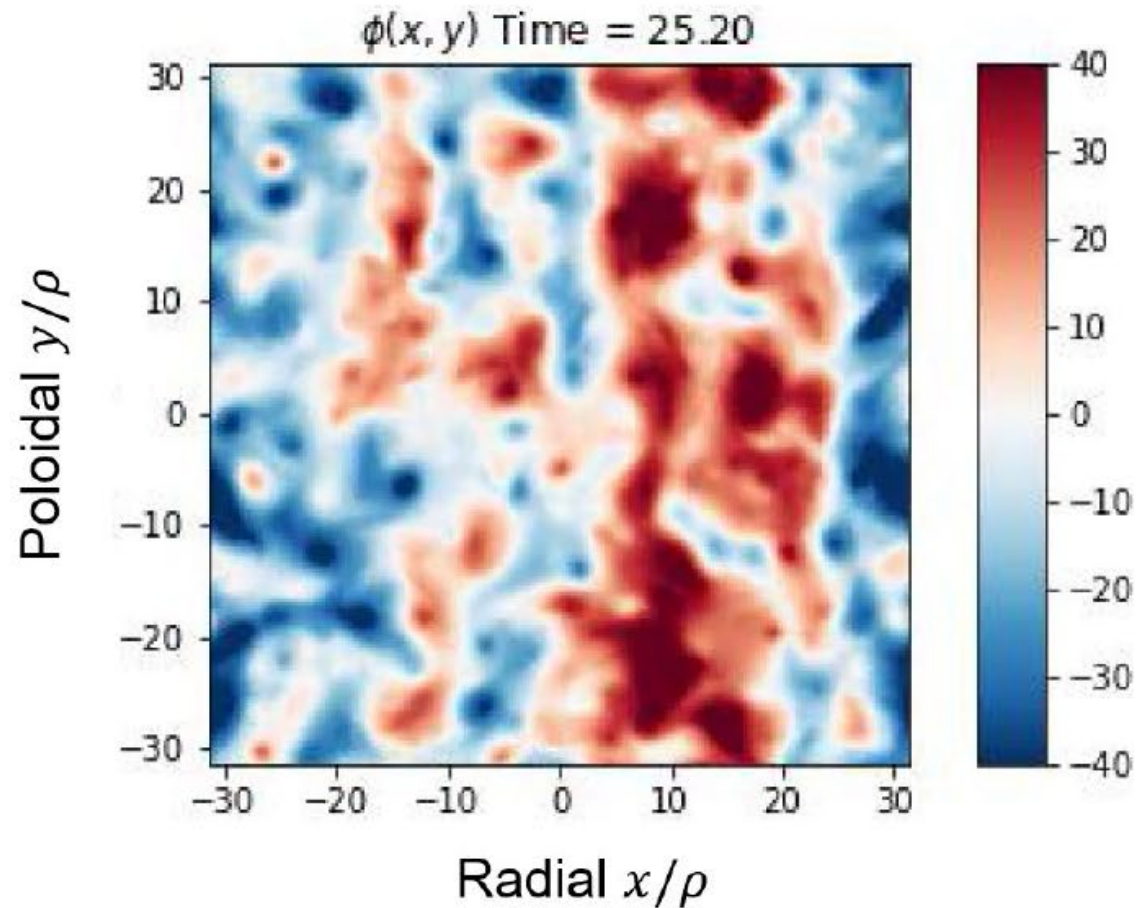
https://github.com/smaeyama/lec_Summer_Student_Program/tree/ssp2024/ssp2024

hweq2d/

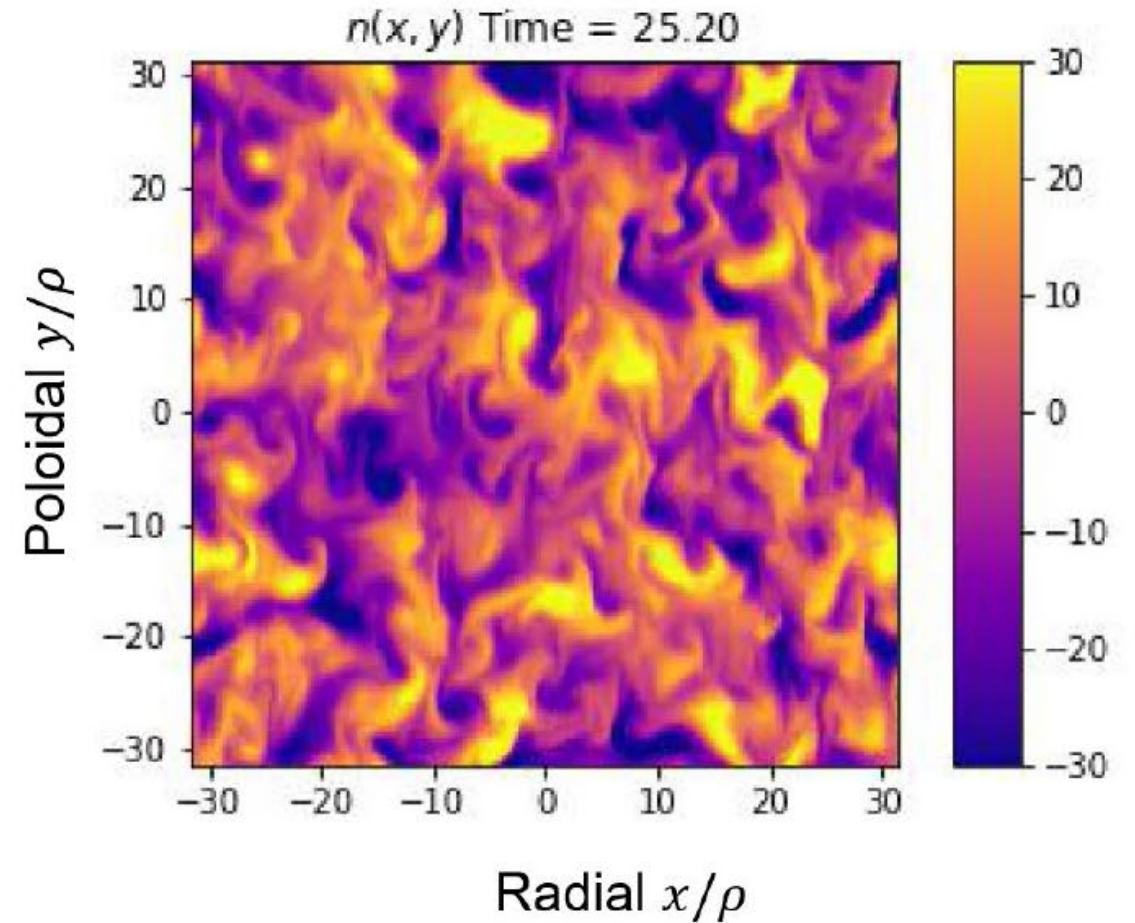
data/	シミュレーションデータ格納用ディレクトリ
diag/	データ解析用Pythonスクリプト群
animation_phiinxy.ipynb	# $\phi(x,y)$ の2次元分布アニメーション
animation_phiinkxky.ipynb	# $ \phi(kx,ky) ^2$ の2次元分布アニメーション
plot_phiintky.ipynb	# エネルギースペクトルの時間発展図
calc_S_kpq.ipynb	# 対称化エネルギー伝達関数 $S_k^{p,q}$ の評価
plot_S_kpq_graph.ipynb	# $S_k^{p,q}$ のネットワーク可視化
calc_D_kpq.ipynb	# エネルギー伝達の有向表現 $D_{k \leftarrow q}^p$ の評価
plot_D_kpq_graph.ipynb	# $D_{k \leftarrow q}^p$ のネットワーク可視化
src/	シミュレーションソースコード (Fortran)
Makefile	コンパイル情報 (計算機依存)
param.namelist	計算条件・物理パラメータ設定ファイル

シミュレーション結果例

Electrostatic potential $\tilde{\phi}$



Density perturbation \tilde{n}



Outline

- 磁場閉じ込めプラズマにおける乱流と輸送
- 実習課題について（理論）
- 実習課題について（シミュレーション）
- 実習の進め方

実習の進め方 1

- シミュレーションソースコード `src/` は変更しない（予定）
- まずは、コンパイル(`make`)とプログラムの実行(`./hweq2d.exe`)を試みよう。
- Python(Jupyter環境) を用いてデータ解析してみよう。
- 物理パラメータを変えたシミュレーションを実行してみよう。
 - 方程式モデルを `flag_calctype = "nonlinear"` から `flag_calctype = "linear"`（非線形項を無視して線形化した方程式）に変えるとどうなるか？
 - 密度勾配パラメータ `eta` ($\kappa = -\partial_x \ln n_0$) の値を増減させるとどうなるか？
 - 断熱パラメータのモデルを `flag_adiabaticity = "constant"` から `flag_adiabaticity = "modified"` に変えるとどうなるか？
- 結果を整理して、考察をメモする。→ そうするうちに、また新たな発見・疑問点に気づく。→ その発見や疑問を検証するにはどうすればよいか考え、実行する。
（+ 文献調査 = 基本的な研究のサイクル）

実習の進め方 2

- ❑ 金曜の発表会（発表**10分**質疑応答**3分**）に向けて、「何を調べて、どういうことが分かったか」というアウトプットを意識して実習に取り組みましょう。
- ❑ 実習は毎日**17:15**に終了です。正味**2日半**ですので短期集中！
- ❑ ヘリコンクラブに帰ってからの自習、発表資料作成等は自主性にお任せします。
- ❑ 操作などわからない点は、①教員に聞く、②**Google**検索（公式マニュアルは割と信頼できる）、③**ChatGPT**に尋ねる（ただし、鵜呑みにしすぎない）
- ❑ 実習に不要なインターネットアクセスはしないこと。
- ❑ 何かあったら、前山または沼波まで連絡ください。
- ❑ それでは、がんばりましょう！